BIJVOEGSEL

VAN HET NIEUW TIJDSCHRIFT
□ □ VOOR WISKUNDE □ □
GEWIJD AAN ONDERWIJSBELANGEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
DEVENTER

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. D. J. E. SCHREK
UTRECHT

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

2e JAARGANG 1925/26, Nr. 5/6

P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 10 à 12 vel f 3.—. Voor inteekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 2.—.

Het Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 10 à 12 vel druks. Prijs *f* 3.— per jaargang. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens" (*f* 8.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 2.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam, Frans-van-Mierisstraat 112; Tel. 28341. Aangeteekende zendingen met bijvoeging: „Bijkantoor Saxen-Weimarlaan 48".

Het honorarium voor geplaatste artikelen bedraagt *f* 20.— per vel.

De prijs per 25 overdrukken of gedeelten van 25 overdrukken bedraagt *f* 3,50 per vel druks *in het vel gedrukt.* Gedeelten van een vel worden als een geheel vel berekend. Worden de overdrukken buiten het vel verlangd, dan wordt voor het afzonderlijk drukken bovendien *f* 6.— per vel druks in rekening gebracht.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

---

der d. 1′ hebben ze verrassend snel te pakken. En wat mij ook opviel, is, dat 't gebruik van de directe tafels voor sinus enz. (in plaats van dat van die der logarithmen van die verhoudingen) zoo voldeed.

Ik hoop, dat ik er ten slotte in geslaagd ben de tafels vrij van druk- of rekenfouten te houden. Het is een lastig — ik zou haast zeggen een angstig — werk. Dit bleek mij een dezer dagen, toen mij andere pas uitgekomen vierdecimalige tafels vertoond werden. Reeds oppervlakkig die tafels controleerende, vond ik er 7 fouten in.

D. P. A. VERRIJP.

Naschrift.

Het komt mij bij deze gelegenheid niet ondienstig voor er op te wijzen, dat het wenschelijk is, dat men eens breke met de gewoonte — niet het minst op examens — om lange en met veel cijfers behepte trigonometrische berekeningen te laten uitvoeren. Dergelijke becijferingen hebben noch uit een paedagogisch noch uit een practisch oogpunt eenigen zin. Van uit een paedagogisch of methodisch oogpunt is het meestal voldoende, als men „goniometrisch" of „trigonometrisch" de oplossing van een gesteld probleem kan geven, maar „becijferingen zelf" komen in de practijk *in 't algemeen* meer met gewone getallen, dan met goniometrische verhoudingen voor. Het is ook daarom, dat men met de zoo weinig omvangrijke tafels als de boven besprokene in 't algemeen kan volstaan. V.

NADERE BESCHOUWINGEN OVER DE OPLEIDING TOT LEERAAR IN WIS- EN NATUURKUNDIGE VAKKEN.

(Mededeeling van de Commissie, belast met een onderzoek naar den toestand van het Wiskunde-onderwijs op de H. B. S. met 5-jarigen cursus).

In onze publicatie „Beschouwingen over de universitaire opleiding tot leeraar in wis- en natuurkunde" hebben wij gewezen op de leemten, die de universitaire opleiding tot leeraar in wis- en natuurkunde naar onze meening vertoont en eenige denkbeelden ontwikkeld over de wijze, waarop aan de door ons geuite bezwaren zou zijn tegemoet te komen. Wij wenschen thans ook de niet-universitaire wegen, die tot het leeraarsambt voeren, de studie voor middelbare acten, de opleiding tot ingenieur te Delft en die tot officier bij de marine, de artillerie en de genie kritisch te beschouwen, om na te gaan, of ook bij deze categorieën wellicht de opleiding voor een deel de schuld draagt van de gebreken, die men in het wiskunde-onderwijs op de middelbare scholen veelal kan constateeren.

Vooreerst echter eischt onze eerste publicatie over de opleiding in zooverre nog eenige aanvulling, als wij daarin nog niet spraken over de universitaire studie in wis- en natuurkunde, zooals zij na de jongste wijziging van het academisch statuut geworden is. Wij zullen dus eerst nog hebben na te gaan, of door die wijziging wellicht sommige van onze wenschen zijn verwezenlijkt.

Wanneer men eenigszins in de gecompliceerde inrichting van de tegenwoordige studie in de faculteit van wis- en natuurkunde is doorgedrongen (wat aanvankelijk belemmerd wordt door het zonderlinge spraakgebruik van het statuut, om de vakken niet langer bij hun naam te noemen, maar ze alle aan te duiden door het woord wis- en natuurkunde, voorzien van een index), krijgt men als voornaamsten indruk dezen, dat de geheele opzet van de studie minder breed is dan vroeger. Het is duidelijk, dat hieraan zoowel voor- als nadeelen verbonden zijn: eenerzijds schept de

sterkere specialiseering de mogelijkheid, om sneller in contact te komen met het tegenwoordige stadium van ontwikkeling der als studie-object gekozen wetenschap en verhoogt ze dus de kans op zelfstandige wetenschappelijke werkzaamheid; anderzijds dreigt ze het tot stand komen van een breederen kijk op het geheel der wis- en natuurkundige wetenschappen te belemmeren en levert ze dus gevaren op voor de geestelijke ontwikkeling van die groote meerderheid, die, door welke oorzaak dan ook, tot de verdere ontwikkeling van de wetenschap niet noemenswaard bijdragen en die meer gebaat zijn met veelzijdigheid van belangstelling voor hare problemen en ruimheid van inzicht in hare methodes, dan met vergaande, maar wellicht eenzijdige kennis van slechts enkele harer gebieden.

Vóór de nieuwe regeling pleit de door haar geopende mogelijkheid van verkorting van den verplichten studietijd, indien de van examenzorgen bevrijde doctorandus in de gelegenheid verkeert, nog enkele jaren aan zijn eigen universiteit of in een buitenlandsch centrum van wetenschap door te brengen; tegen haar pleit dezelfde mogelijkheid, indien ze als middel wordt aangegrepen, om in een minimum van tijd met een minimum van kennis een onderwijsbevoegdheid te behalen en indien ze er iemand dus toe brengt, de maatschappij in te gaan zonder voldoenden voedingsbodem voor verderen geestelijken groei.

De bezwaren, die men zoo telkens weer tegenover de vaak met zooveel vuur verdedigde voordeelen der nieuwe regeling kan stellen, zijn niet denkbeeldig: wanneer men het b.v. regel ziet worden, dat de doctorandus in wis- en natuurkunde met hoofdvak wiskunde volkomen onkundig blijft van mathematische physica (een vak, welks nauw verband met en prikkelenden invloed op de wiskunde de meest zuivere mathematicus niet zal kunnen ontkennen), dan ligt hierin een onmiskenbare achteruitgang ten opzichte van den vroegeren toestand, waarin ook de op wiskunde gespecialiseerde doctorandus toch altijd eenige jaren colleges in de mathematische physica had gevolgd. Men vraagt zich dan af, of met zulk een offer de mogelijkheid van een iets verder doordringen in de zuivere wiskunde niet te duur is gekocht en men ziet met verbazing de eenzijdigheid, die aan de studie in wiskunde langs den weg der middelbare actes met zooveel recht wordt verweten, in de universitaire studie haar intrede doen.

En wat den duur van de studie betreft: wanneer een jongen, die met 17 jaar de H. B. S. verlaat, gebruik makend van den weg, dien de wet-Limburg hem opent, de universitaire studie begint en, hoewel geenszins in het bezit van buitengewone geestesgaven, vier jaar later als doctorandus met onderwijsbevoegdheid voor wiskunde, mechanica en kosmographie de maatschappij intreedt (wat tegenwordig meer dan eens voorkomt), dan kan men toch vol zorg vragen, of men aan hem en aan zijn toekomstige leerlingen een dienst bewijst, door hem te verleiden tot een zoo onvolledig gebruik van de mooiste gelegenheid tot ontwikkeling, die men hem ooit zal kunnen bieden. Er moge vroeger overdrijving hebben bestaan in het verlengen van den verplichten studietijd, de overdrijving naar de andere zijde, die nu althans mogelijk is, kan echter èn voor hen, die meenen, ervan te profiteeren èn voor het geestelijk peil van het leerarencorps, waartoe zij later zullen behooren, gevaren opleveren, die veel ernstiger zijn dan de nadeelen van een te lang verblijf aan de universiteit.

In het algemeen kunnen wij den indruk niet van ons afzetten, dat de voordeelen van de nieuwe regeling zeer zelden en de nadeelen zeer geregeld invloed hebben op het Middelbaar Onderwijs. Zoo levert b.v. het instituut der z.g. bijvakken bij het doctoraal-examen, waarâan onderwijsbevoegdheid verbonden is, een niet te miskennen gevaar op. Formeel toch opent het statuut b.v. de mogelijkheid, dat men na een candidaatsexamen in de scheikunde met wiskunde al of niet tot bijvak, gevolgd door een doctoraal-examen met scheikunde als hoofdvak en wiskunde als bijvak, onderwijsbevoegdheid in wiskunde verkrijgt, terwijl het duidelijk is, dat men langs dezen weg zeer zeker niet de voor het geven van dat onderwijs vereischte ontwikkeling zal hebben verkregen. Moge de faculteit van wis- en natuurkunde steeds in voldoende mate hare indirecte verantwoordelijkheid voor het peil van de docenten bij het Middelbaar en Gymnasiaal Onderwijs beseffen, om gebruik te maken van hare bevoegdheid, misbruik van de door het nieuwe statuut geschonken vrijheden tegen te gaan en daardoor het gevaar te keeren, dat er langs den weg der bijvâkken onvoldoend gevormde leeraren in wiskunde zullen worden afgeleverd.

Wanneer wij ten slotte nog bedenken, dat onder het nieuwe academische statuut evenmin als onder het oude eenige rekening wordt gehouden met de toekomstige leeraarsloopbaan van de meer-

derheid der studenten in de wis- en natuurkunde, dat nog steeds verzuimd wordt, zorg te dragen voor hunne elementair-mathematische, historische, methodische en kennistheoretische ontwikkeling, dan moeten we tot de conclusie komen, dat de wenschelijkheid van een wijziging van de universitaire opleiding tot het leeraarsambt nog steeds in onverzwakte mate bestaat.

Voordat wij thans overgaan tot een beschouwing van de niet-universitaire opleiding tot leeraar in wis- en natuurkunde, wenschen wij enkele algemeene opmerkingen te maken, die wellicht zullen kunnen bijdragen tot voorkoming van misverstand over het doel, dat wij met het publiceeren onzer beschouwingen nastreven.

In de eerste plaats deze, dat het object onzer kritiek bestaat uit de verschillende wegen, die tot het leeraarsambt voeren, niet uit de personen, die langs die wegen hun opleiding ontvingen. Het ontgaat ons namelijk niet, dat de opleiding, die iemand heeft genoten, slechts een der zeer talrijke factoren is, die zijn waarde als docent bepalen, en dat het dus even ongeoorloofd zou zijn, om hem naar de opleiding alleen te beoordeelen, als het oordeel over zijn opleiding te laten beïnvloeden door de wijze, waarop hij zijn taak vervult. Naast wetenschappelijke vorming toch, naast omvang en diepte van kennis, eischt het onderwijs meer van zijn dienaren: het eischt een, hetzij aangeboren, hetzij door ervaring verkregen vermogen tot het onderrichten van jongeren, het eischt de animo, het geduld en de tact, zonder welke dat vermogen zich niet kan ontwikkelen en niet kan blijven bestaan en het verlangt de geestelijke frischheid, de menschelijkheid en het plichtsbesef, die de euvelen van verveling, onredelijkheid en verslapping verre moeten houden.

Het bezit van deze algemeen-menschelijke eigenschappen, die met wetenschappelijke qualiteiten evengoed wel als niet gepaard kunnen gaan, zal de gebreken der slechtste van alle bestaande opleidingen in dezelfde mate kunnen opheffen, als het gemis daaraan de voordeelen der best denkbare kan te niet doen: moge deze overweging het besef levendig houden, dat het slechts één van de vele kanten van de leeraarspersoonlijkheid is, die wij in onze beschouwing over de opleiding in het oog vatten.

Zou die beschouwing zelve daarom echter overbodig moeten heeten? Wij gelooven het niet. Vooreerst toch hangt de aard van iemands intellectueele ontwikkeling, de diepte van zijn inzicht, de

omvang van zijn weten, in hooge mate af van den weg, die hem tot zijn ambt voerde en al moge het ook hier weer van subjectieve factoren afhankelijk zijn, in hoeverre iemand profiteert van de kansen, die hem worden geboden, er blijven toch voldoende objectieve criteria over, om de verschillende opleidingen naar hare wetenschappelijke qualiteiten te vergelijken.

En het is wel waar, dat de wetenschappelijke persoonlijkheid van een docent slechts één der factoren is, die zijn waarde voor het onderwijs bepalen, maar men hoede zich voor de fout, de beteekenis van juist dezen factor te onderschatten. Een behoorlijk intellectueel peil is zeker geen voldoende voorwaarde voor een goed docent, maar het is, zooals wij in onze eerste publicatie betoogden, even zeker een zeer nodzakelijke. De leeraar in wis- en natuurkunde heeft voor de behoorlijke vervulling van zijn ambt een wetenschappelijke ontwikkeling noodig, zooals men ze in den regel niet zonder ernstige studie onder bevoegde leiding verkrijgt; wie met een tekort op dit gebied zijn loopbaan begint, zal slechts dan zijn taak naar behooren kunnen verrichten, wanneer hij aan inzicht in wat hem ontbreekt, wilskracht en studiezin paart; wie overtuigd is, dat het een onredelijk optimisme mag heeten, het bestaan van deze drie eigenschappen bij alle leeraren met een onvoldoende opleiding te onderstellen, zal moeten toegeven, dat er alle aanleiding is, om te onderzoeken, of er opleidingen bestaan, die zulk een tekort veroorzaken, en zoo ja, om middelen te beramen, die verbetering zullen kunnen geven. Een betere verzorging van de voorbereiding zal toch zeker niemands deugden verminderen en wel veler gebreken verhelpen.

Wanneer wij, thans tot ons eigenlijke onderwerp overgaande, allereerst de opleiding tot leeraar in wiskunde langs den weg der acten KI en KV aan de orde stellen, dan is er reeds dadelijk aanleiding de principiëele vraag naar het bestaansrecht van dezen weg onder de oogen te zien. Zooals bekend is, wordt dat bestaansrecht tegenwoordig meer dan eens ontkend op grond van de overweging, dat het wenschelijk is, dat alle leeraren academisch gevormd zullen zijn en wordt er naar gestreefd, de middelbare opleiding te doen vervallen.

Nu onderschrijven wij — dit wenschen wij nadrukkelijk te verklaren — geheel de wenschelijkheid eener academische opleiding

voor alle leeraren. Dat wij niet blind zijn voor de gebreken, die die opleiding vertoont, zal, na wat wij reeds over dit onderwerp schreven, wel geen nader betoog behoeven. Nog veel minder ontgaat ons echter, welk een waardevolle invloed een verblijf in een universitair milieu, geheel afgezien van de hoeveelheid kennis, die men er opdoet, op iemands persoonlijkheid kan hebben en hoezeer juist de invloed van die universitaire imponderabilia aan het middelbaar en gymnasiaal onderwijs ten goede kan komen: het directe contact met een centrum van wetenschappelijk werk, de vrijheid van beschikking over voortreffelijke hulpmiddelen voor studie in alle richtingen, de dagelijksche omgang met studeerenden in alle faculteiten, dit alles schept mogelijkheden van ontwikkeling, die een winst voor het geheele leven kunnen opleveren, voor wie er gebruik van weet te maken. Niemand zal de wenschelijkheid kunnen ontkennen, dat allen, die onderwijs zullen hebben te geven, dat wil zeggen, die geroepen zijn, voortdurend door hun persoonlijkheid op den geestelijken groei van jeugdige menschen in te werken, in de gelegenheid worden gesteld, den prikkelenden invloed van het academische leven te ondergaan en daarvan, ieder naar de mate van zijn ontvankelijkheid, te profiteeren.

Naar onze meening echter kan men het beginsel van de wenschelijkheid eener universitaire vorming voor alle leeraren toegeven, zonder daarom dadelijk de conclusie mede te aanvaarden, dat zij, aan wie die vorming niet ten deel viel, van het leeraarsambt moeten worden uitgesloten. Men vergete niet, dat de weg der middelbare-acte-studie door de meerderheid van hen, die hem volgen, niet gekozen wordt, omdat zij hem voor den meest verkieselijken houden, maar omdat hij voor hen de eenig mogelijke is, dat de omstandigheden, waaronder de studie volbracht wordt, in vele gevallen zeer veel moeilijker en bezwaarlijker zijn dan die, waaronder de gemiddelde student aan een universiteit verkeert en dat ten slotte de eischen, die de middelbare examens stellen, op een aanzienlijke hoogte staan. Zou het verantwoord zijn, om aan menschen, die de niet geringe werkkracht bezitten, om zich, vaak misschien onder moeilijke financieele omstandigheden en in vele gevallen tijdens het vervullen van een betrekking, op te werken tot het peil, waarop ze aan de gestelde eischen kunnen voldoen, beletselen in den weg te leggen op grond van de overweging, dat het èn voor hen zelven èn voor het onderwijs in vele opzichten verkieselijker zou zijn, indien

zij — wat zij nu eenmaal in de meerderheid der gevallen niet kunnen — een universitaire studie volbrachten? Zou men op die wijze niet waardevolle geestelijke energie tot werkeloosheid dwingen?

Het is waar, dat men dit wel zou moeten doen, indien het vaststond, dat aan de opleiding langs den weg der middelbare acten zoo groote gebreken aankleefden, dat zij eenvoudig niet voldoende op het leeraarsambt kon voorbereiden, indien dus de ervaring leerde, dat de bezitters der acten KI en KV den toets der vergelijking met hunne academisch gevormde collega's in het geheel niet konden doorstaan. Daar de ervaring dit naar onze meening niet leert, terwijl zij echter wel openbaart, dat de studie voor de middelbare acten zekere bezwaren vertoont, die menigmaal een minder gewenschten invloed op het onderwijs uitoefenen, wenschen wij, op grond van de boven gehouden beschouwingen het beginsel van het bestaan eener middelbare opleiding naast de universitaire aanvaardende, slechts over die bezwaren, voorzoover ze ons voor verbetering vatbaar schijnen, enkele opmerkingen te maken.

Wij denken daarbij voor alles aan de groote en in ons oog noodelooze eenzijdigheid van de middelbare studie. Het bezit van de acten KI en KV toch schept niet alleen geen waarborgen voor de aanwezigheid van een algemeene ontwikkeling, die niet achter blijft bij die der leerlingen, waaraan de bezitter dier actes later les zal moeten geven (men denke b.v. aan de kennis van vreemde talen), maar het waarborgt zelfs niet de geringste ontwikkeling in die bijzondere wetenschappen, die op de school, waar hij wiskunde doceert, in nauw verband met zijn vak worden onderwezen, in vakken als mechanica, kosmographie en natuurkunde. Het behoeft nauwelijks betoog, welke nadeelen uit dezen toestand zoowel voor de wetenschappelijke ontwikkeling van de bezitters dier acten zelve, als voor het onderwijs, dat ze hebben te geven, kunnen voortvloeien. In hoe sterke mate het laatste geval is, hebben wij bij voortduring kunnen ondervinden, toen wij bij het opstellen van een concept-leerplan voor de H.B.S. streefden naar een zoo innig mogelijk verband tusschen de verschillende wis- en natuurkundige vakken; wij dachten ons in klasse IV het onderwijs in mechanica en dat in de beginselen der differentiaalrekening in nauw onderling verband gegeven; we legden datzelfde verband tusschen meetkunde en goniometrie, tusschen stereometrie eenerzijds en mechanica en kosmographie anderzijds, maar we moesten bij al die gelegenheden

erkennen, dat in de practijk van die wederzijdsche doordringing van de wis- en natuurkundige vakken niet veel terecht zou kunnen komen, omdat reeds bij alle bezitters der acten KI en KV de bevoegdheid noodzakelijk tot wiskunde beperkt blijft, terwijl bij velen van hen ook de wetenschappelijke ontwikkeling niet meer dan hun studievak blijkt te omvatten.

Het komt ons voor, dat het belang van het onderwijs vóór alles op dit gebied verbetering van de opleiding eischt en we zullen dan ook enkele principes opstellen, die naar onze meening daarbij richting zouden kunnen geven. Vooreerst moet echter nog worden nagegaan, hoe het met de middelbare opleiding gesteld is, wanneer men, eenmaal haar eenzijdigheid aanvaardend, haar uitsluitend van wiskundig standpunt beschouwt. Men kan dan niet ontkennen, dat de middelbaar opgeleide leeraar in den aanvang van zijn loopbaan in den regel reeds een voorsprong heeft op den academisch gevormden door zijn in den regel onvergelijkelijk soliedere kennis der lagere wiskunde en zijn daaruit voortvloeiende veel grootere vertrouwdheid met de leerstof, die hij doceeren moet, en dat hij een tweeden voorsprong op hem kan hebben, indien hij voldoende aanpassingsvermogen bezit, om van de in het lager onderwijs opgedane onderwijsroutine in het middelbaar onderwijs partij te trekken en er niet door te worden gehinderd. Hierbij mag echter weer niet worden vergeten, dat de eischen, die het examen KI op het gebied der lagere wiskunde stelt, meer de vaak gecompliceerde toepassingen van de elementaire mathematische methodes betreffen dan den streng logischen opbouw van de fundamenten, dat er meer gelet wordt op routine in het oplossen van moeilijke vraagstukken dan op principiëele fundamenteele inzichten. Exacte kennis van den opbouw wordt eigenlijk alleen bij Rekenkunde tot op zekere hoogte verlangd; op het gebied van Planimetrie en Stereometrie echter blijven bij de middelbare studie de beginselen in hetzelfde vage duister gehuld, waarin de meeste leerboeken zoo gaarne de moeilijkheden van een exacte fundeering verdoezelen. Van de axiomatica der meetkunde blijft de KI candidaat dan ook in den regel geheel onkundig, terwijl het examen KV niet dwingt, dit tekort in te halen. Kennis van de beginselen der niet-Euclidische meetkunde, juist voor den a.s. leeraar zoo onmisbaar voor het verkrijgen van een ruimeren kijk op het geheele wiskundige denken, wordt niet van hem geeischt en het gevaar is niet denkbeeldig, dat zijn geheele elementair-

mathematische ontwikkeling met een kolos op leemen voeten zal moeten worden vergeleken.

Op grond van al deze overwegingen lijkt het ons echter niet onmogelijk, een zoodanige wijziging in de middelbare opleiding aan te brengen, dat aan de voornaamste der opgesomde bezwaren wordt tegemoet gekomen.

Men heffe daartoe de splitsing van de middelbare acten KI, KII, KIII en KV op en stelle, als vroeger, een middelbare acte A voor wis- en natuurkundige wetenschappen in, gevolgd door een eventueel gesplitste acte B, welker bezit onderwijsbevoegdheid verleent. Het examen voor de acte A omvatte dan een deel van de stof van het tegenwoordige examen KI, aangevuld met elementaire differentiaal- en integraalrekening, en met de beginselen van de theoretische mechanica, van de sterrenkunde en van de experimenteele en mathematische physica. Op de zoo gelegde basis kan dan voor de a.s. leeraren in wiskunde en theoretische mechanica een dieper gaande studie in deze vakken volgen; bij het examen B in deze vakken zouden dan bovendien de met het oog op de leeraarsloopbaan onmisbare eischen op axiomatisch, historisch, methodisch en kennistheoretisch gebied kunnen worden gesteld, welker wenschelijkheid wij bij de bespreking van de universitaire opleiding hebben betoogd. De acten KII en KVI zouden daarnaast gevoeglijk kunnen vervallen. We laten hierbij in het midden, op welke wijze men nog waarborgen voor algemeene ontwikkeling zou kunnen verkrijgen en in hoeverre naast de midelbare studie in wiskunde een soortgelijke in natuur- en scheikunde recht van bestaan heeft.

De zoo gewijzigde opleiding zou dan echter niet beschouwd moeten worden als de normale weg tot het leeraarsambt; de tegenwoordig wel algemeen toegegeven wenschelijkheid van universitaire opleiding voor alle leeraren blijft ook ten opzichte van de verbeterde actenstudie onverzwakt bestaan. Om de boven uiteengezette redenen moet daarnaast echter, niet als regel, maar als uitzondering, een weg open blijven voor hen, die door de levensomstandigheden worden verhinderd, een universitaire studie te volbrengen, maar wier capaciteiten van wil en intellect hun recht geven op een plaats in het Middelbaar Onderwijs.

Aan ingenieurs van de Technische Hoogeschool te Delft wordt, naar de termen der wet, onderwijsbevoegdheid verleend in de

technische vakken, waarin ze onderricht hebben ontvangen en men pleegt deze bepaling zoo te interpreteeren, dat men tot de technische vakken, mirabile dictu, de wiskunde en de theoretische mechanica rekent, en dus ingenieurs tot leeraar in wiskunde en mechanica aanstelt. Deze gewoonte, hoezeer ook door traditie bevestigd en vertrouwd gemaakt, wordt nog steeds zeer verschillend beoordeeld. De tegenstanders bestrijden de onderwijsbevoegdheid voor ingenieurs, door er op te wijzen, dat in de studie aan de Technische Hoogeschool de wiskunde niet om haar zelfs wil wordt beoefend, maar met het oog op hare toepasbaarheid in de techniek, dat daardoor onvermijdelijk aan de ontwikkeling van de vaardige beheersching van hare reken- en constructiemethodes meer waarde wordt gehecht dan aan de verdieping van het inzicht in haar wezen (wat b.v. hierin tot uiting komt, dat men soms na behoorlijke schriftelijke oplossing van enkele vraagstukken van een nader mondeling-examen in wiskunde afziet) en dat dientengevolge de ingenieur-leeraar veelal de wiskunde vanuit een ander dan het zuiver mathematische standpunt beschouwt; zij wijzen er bovendien op, dat de eigenlijke wiskunde-studie te Delft slechts twee jaar duurt en dat er voor verschillende studierichtingen vrees bestaat, dat er daarna van verdere ontwikkeling van wiskundig inzicht weinig meer komt; zij merken verder op, dat ook voor het ontstaan van het juiste begrip van de theoretische mechanica de uit den aard der zaak op het practisch-toepasbare gerichte studie aan een technische hoogeschool niet de meest gewenschte spheer vormt en dat er dus gevaren aan verbonden zijn, om aan Delftsche ingenieurs het onderwijs in mechanica op een H.B.S. op te dragen.

De voorstanders der heerschende traditie plegen al deze argumenten één voor één met verontwaardiging te verwerpen: zij achten juist de combinatie van theoretische en practische kennis, die de ingenieur bezit, een doorslaggevend argument voor zijn geschiktheid tot het ambt van leeraar in wiskunde en mechanica. Volgens hen is de zuiver mathematische behandelingswijze van deze vakken voor het Middelbaar Onderwijs ondoeltreffend en daardoor onvruchtbaar en zal een methode van onderwijs, waarin zooveel mogelijk contact met het practische leven gezocht wordt, voor de jeugd boeiender en dus ook vruchtbaarder zijn. De eischen, die te Delft op wiskundig gebied gesteld worden, waarborgen volgens hen ten volle de aanwezigheid van het intellectueele peil, waarop de wis-

kunde-docent behoort te staan. Zij concludeeren dus, dat volkomen terecht naast doctorandi en bezitters eener middelbare acte ingenieurs als leeraar worden aangesteld.

Het is niet onze bedoeling, ons in het meeningsverschil, waarvan wij hier de twee uiterste standpunten hebben geschetst, te mengen; wij geven er de voorkeur aan, om met aanvaarding van het beginsel der onderwijsbevoegdheid voor ingenieurs, de opleiding, die zij te Delft voor hun leeraarsloopbaan hebben ontvangen, aan onze denkbeelden te toetsen. Over het resultaat dier toetsing nu kan naar onze meening nauwelijks oneenigheid bestaan: ook wie volkomen overtuigd is, dat het tekort aan theoretische ontwikkeling, dat de ingenieur ten opzichte van den doctorandus in wis- en natuurkunde als regel zal vertoonen, ruimschoots wordt vergoed door zijn meer practischen kijk op de wiskundige wetenschappen, zal moeten toegeven, dat er van een eigenlijke opleiding tot het leeraarsambt bij hem evenmin kan worden gesproken als bij den doctorandus, dat hij even onvoorbereid en onervaren als deze zijn loopbaan begint en dat hij al de gebreken vertoont, die wij bij den academisch gevormden leeraar meenden te moeten constateeren.

Wordt dit toegegven, dat zal echter tevens duidelijk zijn, in welke richting onze wenschen ten aanzien van de leeraarsopleiding voor ingenieurs gaan: ook van hen moet het bewijs worden geeischt, dat zij, naast hun technische studie, niet hebben verzuimd, zich die mate van kennis en die soort van ontwikkeling te verwerven, die zij voor de goede vervulling van hun leeraarsbetrekking noodig hebben. Het spreekt echter vanzelf, dat de Technische Hoogeschool, die toch uitsluitend een opleidingsschool voor ingenieurs is, geen rekening kan houden met het feit, dat aanleg of omstandigheden een deel van hare leerlingen naar een loopbaan buiten de techniek drijven en dat zij dus in hare examens niet de waarborgen kan eischen, dat de candidaat op zulk een loopbaan is voorbereid.

Het ware daarom gewenscht, dat de ingenieur, die leeraar wenscht te worden, zich behoorde te onderwerpen aan het middelbare examen B, dat dan tevens een, indien noodzakelijk blijkende, onmisbare en indien overbodige, niet bezwarende controle zou kunnen vormen op zijn theoretische ontwikkeling in wiskunde en mechanica.

Wij meenen ten slotte kort te kunnen zijn over de vierde categorie van wiskunde-leeraren, de officieren van de marine, de artillerie en

de genie. Het komt ons voor, dat de overgangsbepaling, die aan deze categorie onderwijsbevoegdheid verleent, verouderd is en dat het belang van het onderwijs niet wordt gediend, door haar nog langer in stand te houden. Waar er zooveel gerechtvaardigde twijfel bestaat, of de gemiddelde officier wel voldoende wetenschappelijk ontwikkeld is, om zonder meer tot het leeraarsambt te worden toegelaten, is het niet meer dan redelijk, om van den officier, die dit ambt begeert, te verlangen, dat hij door het afleggen van de middelbare examens blijk geeft, op de vervulling daarvan voldoende te zijn voorbereid.

De Commissie:

H. J. E. Beth, voorzitter.
J. van Andel.
P. Cramer.
E. J. Dijksterhuis, secretaris.

HET REDELIJKE DENKEN BIJ ONS WISKUNDE-ONDERWIJS.

Een artikel van H. F. van Timmeren in het Tijdschrift voor Wijsbegeerte, jaargang 17: „De redelijkheid der formeele wetenschap of de drie cardinale denkfouten", is de aanleiding tot het schrijven van dit opstel. Hierbij gaan samen eenige ervaring op onderwijsgebied en het geloof, dat een andere kijk op sommige onderdeelen der wiskunde, die door veel boeken haast tot iets onveranderlijks werden, wel eens heilzaam werken kan.

Ter inlichting van den lezer gaan hier vooraf de bedoelde cardinale denkfouten. Hij, die deze fouten begaat, zondigt tegen een of meer der volgende drie „denknormen":

I. Bijzondere kenmerken der voorstellingen behooren niet tot den inhoud van het begrip.

II. „Oneindig groot" is geen kenmerk van een constante.

III. De limiet van een veranderlijke grootheid is geen waarde dier veranderlijke.

Zooals iemand, die eenigszins geschoold is in de wiskunde, wel dadelijk ziet, laten deze „denknormen" aan redelijkheid niet veel te wenschen over. Een grondige bespreking van het artikel laat ik achterwege, is in dit tijdschrift ook niet op haar plaats. Ik zal slechts die fouten mededeelen en bespreken, ten aanzien waarvan ik mijn gevolgtrekkingen voor het onderwijs wil geven.

Als een eerste fout dan tegen I wordt genoemd de hoofdeigenschap der rekenkunde: een hoeveelheid verandert niet, als men de eenheden in een andere volgorde neemt. De heer v. T. toont aan, dat in het rekenkundige begrip hoeveelheid of aantal het bijzondere kenmerk „volgorde" niet voorkomt, waaruit volgt, dat de hoofdeigenschap, zooals ze hier geschreven is, geen zin heeft. Ik meen inderdaad den heer v. T. hierin gelijk te moeten geven. Er zijn er, die de „hoofdeigenschap" als boven stellen en...... bewijzen! Bij het bewijs zullen zij dus op de een of andere manier een

volgorde der eenheden moeten aannemen. Nu kan men pas van volgorde spreken, als er iets te onderscheiden is, dus als de eenheden verschillend gedacht worden, zooals bij een hoeveelheid concrete dingen. Maar juist ontdaan van alle verschil, juist bij volkomen gelijkheid (een gelijkheid, die practisch onmogelijk is), wordt die hoeveelheid een exact-wiskundige hoeveelheid, en dàn is geen volgorde meer te onderkennen. Eerst als men ze van een nummer voorzag, zouden de eenheden weer van elkaar te onderscheiden zijn, maar dan waren ze ook al niet meer gelijk. Dat voorzien van een nummer is een noodzakelijke voorwaarde voor de voorstelbaarheid van een hoeveelheid, maar het is een hulpmiddel, dat bij de *toepassing* gebruikt wordt. [1]) Wanneer wij dus een volgorde in een hoeveelheid aannemen, zijn wij bezig onze theoretische wiskunde op de praktijk toe te passen. Nu kan men dat nummeren der eenheden opvatten als het aanbrengen van een één-één-verwantschap en het zoo willen terugbrengen tot zuivere wiskunde, — doch dan *tellen* we de hoeveelheden en heel en al zuivere wiskunde is dit niet. Er bestaat blijkbaar verschil van meening over deze laatste bewering.

In hoogere deelen der wiskunde spreekt men direct van toepassingen, zoodra men de praktijk te hulp neemt, waarom dan bij dit begin niet? Men kan die één-één-verwantschap definiëeren, men kan dan het aanbrengen daarvan tellen noemen en met behulp van zulk een telling de „hoofdeigenschap" bewijzen, — maar dat aanbrengen van de één-één-verwantschap tusschen de eenheden eener hoeveelheid en de rij der natuurlijke getallen bevat voetangels en klemmen! Wat zijn die natuurlijke getallen? Bedenk, dat het te doen is om een grondslag van de rekenkunde! Vergelijk dienaangaande de definitie van Schuh in zijn „Leerboek der Theoretische Rekenkunde", deel I, blz. 1, en het uitgebreide en toch nog beknopte relaas van B. Russell in zijn „Introduction to Mathematical Philosophy", hoofstuk 1 en 2. De beginselen, waarop de rekenkunde wordt opgebouwd, te grondvesten, gaat met die één-éénverwantschap nog niet zoo eenvoudig. Hoeveel eenvoudiger gaat het dan nog met het intuïtieve hoeveelheidsbegrip, dat volgorde als kenmerk mist.

---

[1]) Zie voor dit alles: Tijdschrift voor Wijsbegeerte, jaargang 17, blz. 77 e. v.

De heer v. T. zegt dus [1]): „Wat men verwisselen wil, moet in een of ander opzicht verschillen. Dingen kan men dus verwisselen, geen eenheden". De schrijver meent hier met dingen: substanties, zoover wij die door de ervaring kennen, — die dus nooit gelijk zijn in den zin van wiskundige eenheden. „Volgorde" is dus een bijzonder kenmerk van eenige concrete hoeveelheid, maar behoort niet tot den inhoud van het begrip. Er kan dus wel zijn een hoofdeigenschap van het *tellen,* want tot den inhoud van het begrip tellen behoort „volgorde" zeker. Die hoofdeigenschap moet dus luiden: de telling eener hoeveelheid is onafhankelijk van de volgorde, waarin de eenheden worden geteld. [2]) Beschouwt men deze telling inderdaad als toegepaste wiskunde, dan heeft men hier het gebied der zuivere wiskunde verlaten, en alle consequenties uit een zoodanige hoofdeigenschap getrokken mogen voor den exacten mathematicus geen overtuigende kracht hebben. — Hier worde terloops de aandacht gevestigd op de overal optredende wisselwerking tusschen de voorwerpen uit onze ervaring, die altijd de aanleiding vormen tot wiskundige „bedrijvigheid", en de begrippen der zuivere wiskunde, die aan die voorwerpen ten slotte hun ontstaan danken, maar hun afkomst als het ware moeten verloochenen.

Heeft deze kwestie van zuivere of toegepaste wiskunde nu zooveel waarde, dat het schrijven er over in een tijdschrift aan *onderwijsbelangen* gewijd eenige reden heeft? Ik meen van ja, en dat om twee redenen. In de eerste plaats omdat de wetenschap, of we met zuivere, dan wel met toegepaste wiskunde te maken hebben, beslist over de bewijsbaarheid van de „hoofdeigenschap", d.w.z. over de vraag of deze al of niet een eigenschap is. Want blijkt het, dat die „volgorde" ons werkelijk bij de toegepaste wiskunde brengt, dan heeft de „hoofdeigenschap" geen zin en kan van bewijzen geen sprake zijn. Ze is dus òf een eigenschap, òf iets zonder zin, d.i. niets; een axioma is het nooit. [3]) Dit feit is zeker voor het onderwijs van belang. In de tweede plaats omdat het opsporen van een wiskundige waarheid (als die er is!) voor wiskunde- opvoeders altijd de moeite waard is, al was het maar om de redelijkheid van hun denken nog eens te beproeven.

---

[1]) l. c. blz. 78.

[2]) Zie Schuh, „Leerboek der Theoretische Rekenkunde", I, no. 15—19, blz. 6—8.

[3]) Schuh, l. c. blz. 8, noot.

De gevolgtrekking, die ik uit het vorige ten aanzien van het onderwijs maak, is nu deze, dat de „hoofdeigenschap" der rekenkunde *voor onze leerlingen* wellicht geen onzin, maar wel overbodigheid is. Van zin ontbloot zal ze niet voor hen zijn, omdat een leerling uit de eerste klasse onzer middelbare scholen geen onderscheid maakt of kent tusschen zuivere en toegepaste wiskunde en het zeker in deze eigenschap niet zal gevoelen. Overbodig echter zal ze hem zonder twijfel voorkomen, — welke eer ze met vele zusteren deelt. Ofschoon dit voor mij in het algemeen geen criterium is voor al- of niet- behandelen in de klasse, geeft hier het zinlooze den doorslag en noem ik de „hoofdeigenschap" niet als zoodanig. Bij het bewijzen van eigenschappen, waarbij ze gebruikt moet worden, wijs ik slechts op het vanzelfsprekend feit, dat verwisseling der eenheden (als men dan daarvan spreken wil) geen invloed op de hoeveelheid uitoefent. Deze bewijzen ondervinden van dat nietnoemen dus geen hinder. Het intuïtieve, dat in het kind is, zal door het in zich opnemen dezer „eigenschap" lijden en in miniemen graad zouden wij formalistisch zijn. Voor het gevoel der kinderen maken wij hen bij vele gevallen tot formalisten. Afgescheiden van de kwestie, of dat jammer zou zijn of niet, — dat het onpaedagogisch is, zal welhaast ieder beamen. Als de imaginaire grootheid $\sqrt{-1}$ wordt behandeld — bij voorbeeld — zal toch niemand dit doen door een symbool in te voeren en te vertellen, dat daarvoor die en die regels gelden, en er dan maar op los laten rekenen. Hoe zou het er in de hersens der kinderen uitzien bij zulk een handelwijze! Menig oudere, die voor de eerste maal deze formalistische invoering onder het oog kreeg, zal even iets onbehaaglijks gevoeld hebben, al week dat later waarschijnlijk voor een tegenovergesteld gevoelen. Dit moge nu bij deze „hoofdeigenschap" alles in zeer verkleinde proporties optreden, voor de kinderhersens is het een begin van verwarring, dus voor den leeraar een onheilzaam werk.

Een tweede fout, die volgens den heer v. T. tegen I wordt gemaakt, betreft het begrip „gelijk". Kort samengevat zegt hij het volgende. Twee aanschouwelijke voorstellingen heeten *gelijk*, als zij hetzelfde begrip voorstellen. Dat dus twee gestrekte hoeken of twee rechte hoeken gelijk zijn, is geen stelling, maar „een absolute voorwaarde voor alle denkmogelijkheid". Achter iedere afbeelding van een rechte hoek ligt n.l. het *begrip* rechte hoek en dáárom zijn alle rechte hoeken gelijk.

Dat nu de uitdrukking „gelijk" in de meetkunde zou beteekenen „hetzelfde begrip voorstellend", is voor een wiskundige uitgesloten. En het zou niet de moeite waard zijn hier verder op in te gaan, als de denkwijze van den heer v. T. niet een voorbeeld was van de denkwijze van zoovele ongeschoolden, van zoovelen dus, met wie wij in de school dagelijks omgaan en wien wij de goede begrippen moeten eigen maken. Daarom wil ik even nagaan, in welk verband de (z.g.) fout, dat men de gelijkheid van twee gestrekte hoeken als een stelling uitspreekt, tot I staat. „Bijzondere kenmerken der voorstellingen behooren niet tot den inhoud van het begrip." Als het gelijk zijn van twee gestrekte hoeken dus geen stelling is, maar iets dat uit de definitie (een gestrekte hoek is een hoek, waarvan de beenen in elkaars verlengde liggen) volgt, dan moet het kenmerk grootte niet een *bijzonder* kenmerk zijn, maar evenzeer een algemeen kenmerk als het in elkaars verlengde liggen der beenen. Zoo ziet de heer v. T., en met hem menig niet-wiskundige, in een gestrekte hoek niet een bijzonder soort *hoek*, maar een bijzonder soort *rechte*, en dat twee rechten kunnen samenvallen ligt in de definitie van rechte opgesloten. Hij denkt daarom, dat „grootte" bij gestrekte hoeken op dezelfde wijze in de definitie ligt opgesloten. Maar „grootte" is van hoeken een bijzonder kenmerk, en is bij gestrekte hoeken dus een *gevolg* van de definitie, — wat nog iets anders is dan er in opgesloten zijn, want dan was het een deel van de definitie. We zien dus, dat de gelijkheid van gestrekte hoeken wel degelijk als stelling uitgesproken dient te worden, want krachtens I moeten de *bijzondere* kenmerken afgeleid, d.i. hier: bewezen, worden, als niet tot den begripsinhoud behoorende.

Bij onze leerlingen komt dezelfde verwarring voor als bij den heer v. T.; aan een mogelijkheid van twee ongelijke gestrekte hoeken zal niemand denken en aan de noodzaak van een bewijs evenmin. Daarom is het goed dien gestrekten hoek duidelijk als een bijzonder soort hoek te laten ontstaan en het bewijs zoo eenigszins aannemelijk te maken. Deze stellingen en bewijzen uit den aanvang van het meetkunde-onderwijs vormen voor den docent wel een der moeilijkste deelen van het groote gebied, waarop hij zich beweegt. We komen hier meer op het terrein van het meetkunde-onderwijs, waarover in dit „Bijvoegsel" al geschreven, en op verschillende plaatsen van ons land ook gesproken is. Maar wat men ook doet, bewijzen

of niet, op „redelijkheidsgronden" mag dat bewijzen nooit veroordeeld worden.

Gaan wij over tot de fouten, die volgens schrijver tegen den denknorm II gemaakt worden en die ook in nauw verband staan tot denknorm III. Oneindig groot en limiet zijn begrippen, die bij bepaalde onderdeelen der wiskunde beide voorkomen. De heer v. T. vat een oneindige grootheid op als een oneindig *veranderlijke* grootheid. Iets, dat oneindig groot *is*, kunnen we ons niet voorstellen en valt dus buiten de menschelijke rede, maar het oneindig groot *worden* van een grootheid is voorstelbaar. Bij de uitdrukking „oneindig groot" denken wij ons dus een proces, dat door zijn wording in den aanvang ons geheel bekend is en geen redelijk einde heeft.[1]) Als de heer v. T. zegt: „oneindig groot is geen kenmerk van een constante", dan heeft hij met constanten op het oog de reëele getallen, — waarvoor dus het axioma van Archimedes geldt. En in het systeem dier reëele getallen past het „oneindig groot" zeer zeker niet[2]). Het is volgens den schrijver geen logisch begrip, waarom het niet „zonder reserve" in het verband der logische theorie, i. c. die der reëele getallen, mag worden opgenomen. Zoover ik weet, gebeurt dat echter niet. Zoodra men met transfiniete getallen werkt, worden de rekenregels vastgesteld, zooals ook met complexen geschiedt. Blijven wij dus op onzen redelijken grondslag voortwerken, dan geeft onze ervaringswereld niets meer dan het proces der verwording eener grootheid, welke wij dan oneindig veranderlijk moeten noemen en welke vaak oneindig groot genoemd wordt.

Bij de definitie van limiet vinden wij evenzoo oneindig veranderlijke grootheden. Dat er door wiskundigen fouten tegen II gemaakt worden, betwijfel ik. Maar op het volgende wil ik nog wijzen; het betreft de lengte en oppervlakte van den cirkel.

Voor leerlingen van een inrichting van middelbaar onderwijs (voor 14—17-jarigen, voor wie deze stof wordt behandeld) is de afleiding van de lengte van een gebogen lijn (van een cirkelboog) geheel iets anders dan de afleiding van de oppervlakte eener figuur,

---

[1]) Zie ook: Chs. v. Os, „Het Oneindige" (Openbare les).

[2]) Het rekenkundig bewijzen van dit z.g. axioma door schrijver is, zoover ik weet, niets nieuws. Zie o. m. E. W. Hobson, „The Theory of Functions of a Real Variable", 2e dr., vol. I, blz. 41.

geheel of gedeeltelijk door kromme lijnen begrensd. Ik besluit hiertoe, omdat ik geloof, dat het voor hen niet zoo vreemd is, te hooren dat men niet zonder meer van lengte eener gebogen lijn kan spreken, als in te zien, dat men evenmin van oppervlakte eener kromlijnige figuur spreken mag. Het is voor hen volslagen ondenkbaar, dat de oppervlakte van een cirkel niet op dezelfde manier gedefiniëerd kan worden als die van een rechtlijnige figuur; m.a.w. ondenkbaar, dat we er niet zeker van zijn, dat een cirkel tot oppervlakte heeft een volkomen bepaald deel van de vlakte-eenheid. Maar dat het begrip lengte alleen bij rechte lijnen is voorgekomen en men in de alledaagsche praktijk ook haast uitsluitend met dat eenvoudige lengtebegrip toekomt, maakt, dat ze wel voelen, dat lengte van een cirkelboog iets anders is dan lengte van een rechte lijn. Om mij nu eens kinderlijk uit te drukken: „lengte is iets, dat recht is", is voor hen een uitgemaakte zaak; maar „oppervlakte is iets, dat rechthoekig is", is dat lang niet. Al is er dus geen principiëel verschil in de afleiding van lengte en oppervlakte, in de behandeling voor de leerlingen moet er wèl verschil zijn en voor de leerlingen zelf eindelijk is er dat zeker.

Als de heer v. T. zegt [1]), dat de cirkelomtrek niet de limiet kan zijn van den veranderlijken omtrek van den veranderlijken in- of omgeschreven regelmatigen veelhoek, ziet hij dit als een gevolg van het ongelijksoortige van de rechte en de gebogen lijn. „Zelfs als we het infini actuel als een redelijk begrip aannamen......, zouden we nog niet den cirkelomtrek als continue lijn, maar slechts punten tot limiet krijgen." Dit zou volkomen juist zijn, wanneer die limietovergang de lijnen zelve betrof. Maar dit wordt niet beweerd. We beschouwen niet de gebroken lijn zelf, maar haar *lengte* en daarmede voeren wij den limietovergang uit. Ik begrijp wel, dat ons redelijk denken niet hooren wil van een gebroken lijn, die een gebogen lijn wordt. Deze *lengte* eener gebogen lijn wordt echter eerst gedefiniëerd. Het is hiermee als in de rekenkunde: bij nieuwe grootheden, die buiten het kader der bekende vallen, moeten nieuwe definities en regels worden vastgesteld. Bij nieuwe lijnen moet afgesproken worden, wat men onder lengte wil verstaan, daar dit begrip tot nu toe slechts bij rechte lijnen aanwezig was.

---

[1]) l. c. blz. 103.

Heeft men dat gedaan, dan is de boven omschreven manier om tot de lengte van den cirkel te geraken, niet fout.

Met den meesten nadruk zou ik er dan ook op willen wijzen, hoe noodig het is, dat de leerlingen zich bewust worden van dit relatieve lengtebegrip. Deze materie is den derde-klassers eener H. B. S. bij duidelijke verklaring niets te zwaar, en een dergelijke verwijding van hun horizon doet hun slechts goed. Geen enkele zal bezwaar maken tegen een definitie van limietfiguur, integendeel zullen de meesten haar al te vanzelfsprekend vinden. De vraag, of zulk een veranderlijke grootheid inderdaad een limiet heeft, komt niet bij hen op, en bij den cirkel blijkt ten overvloede, dat de limiet aanwezig is.

Wat overigens de limietkwestie in het algemeen aangaat, behoeft er ook tegenover de leerlingen niet tegen denknorm III gezondigd te worden. Het is hun juist zoo goed duidelijk te maken, dat de limiet nooit bereikt wordt, maar dat men er zoo dicht bij kan komen als men wil. Wie zal niet begrijpen, dat het halveeren van een rechte-lijnsegment en zijn helft, vierde deel, enz. nooit een einde heeft? In dit begrijpen zijn de normen II en III verwerkt: het is een oneindig proces, waarvan de wording ons in den aanvang, en dus geheel, bekend is, en de lengte nul wordt nooit bereikt. Ook het stellingnemen van den heer v. T. tegen de invoering der oneindig verre punten verraadt het niet-mathematisch, doch wel-logisch, standpunt van den schrijver. (Ofschoon Russell beweert, dat mathematica en logica één zijn [1]). Ik vond nooit bezwaar, in de hoogere klassen over een oneindig ver snijpunt van twee evenwijdige lijnen te spreken, al is het in het platte vlak of op de rechte lijn even onbereikbaar als het kleinste transfiniete cardinaalgetal bij de rij der reëele getallen. Als de rechten *l* en *m* elkaar in A snijden en men laat dit snijpunt A de rechte *m* doorloopen, terwijl *l* door een vast punt B blijft gaan, dan begrijpen we, dat dit proces geen einde heeft, en dat de limietstand van *l*, — die op deze wijze nooit bereikt wordt — de stand evenwijdig aan *m* is. Is dit niet even gemakkelijk of even moeilijk te begrijpen als het *samenvallen* van twee punten, b.v. bij den overgang van snijlijn van een cirkel tot raaklijn aan een cirkel? En wie zal aarzelen, dat voor de klasse te bespreken! Bij het „doorloopen" van een lijn door een punt, zoowel in ons eerste

---

[1]) „Introduction to Mathematical Philosophy", blz. 194 e.v.

als ons tweede geval, moet die lijn door den leerling als een continuum worden opgevat.

De overige voorbeelden van fouten, die volgens den heer v. T. tegen zijn denknormen gemaakt worden, staan in geen of zeer verwijderd verband met onze school. De opmerkingen, die ik in het bovenstaande over zijn artikel en vooral naar aanleiding van zijn artikel gemaakt heb, vond ik dáárom moeilijk vóór mij te houden, omdat zijn denkbeelden en de conclusies, die hij trekt, haast geheel de denkbeelden van den gemiddelden leerling zijn. Dit te weten, en de middelen om ze te verbeteren en tegen te gaan, kan voor ons geen kwaad. Al schijnen sommige zaken, hier besproken, heel eenvoudig, ik weet, hoeveel misverstaan er nog is!

A. M. KROON.

DE LOODRECHTE STAND VAN LIJN EN VLAK

DOOR

B. COSTER.

Naar aanleiding van mijn artikeltje in nummer II van den loopenden jaargang van 't Bijvoegsel zijn een paar opmerkingen ingekomen van den heer Crijns, welke bezwaren bevatten tegen het door mij op pag. 80 van bedoeld nummer gegeven bewijs van de bekende stelling over den loodrechten stand van lijn en vlak. Daar ik de juistheid dezer bezwaren geheel en al onderschrijf, volgen bedoelde opmerkingen hier vrijwel onverkort.

De heer Crijns merkt in de eerste plaats op, dat bij het door mij gegeven bewijs z. i. eerst bewezen moet worden, dat in vlak α een lijn getrokken kan worden loodrecht op de buiten dat vlak gelegen lijn AE. De eigenschap, dat de loodlijnen in E op AE een vlak vormen, moet bewezen worden met behulp van de stelling, waar 't hier om gaat. „Zonder deze stelling," zegt hij, „kan men alleen zeggen, dat de bedoelde loodlijnen een kegelvlak vormen, zoodat men te doen krijgt met de snijding van kegelvlak en plat vlak, wat — *ook* wegens de mogelijkheid van imaginaire snijlijnen — pijnlijk is op deze plaats. Gelukkig kan deze moeilijkheid vermeden worden, door uit te gaan van een loodlijn CD in α op BE. Dan moeten dus op blz. 80 van den 16en regel tot den 21en A en B verwisseld worden.

Ook een ander klein bezwaar, dat nog gemaakt kan worden, is uit den weg te ruimen. Bij twee der standen van BE is de loodlijn CD op BE evenwijdig met BD (resp. BC). Men kan daaraan tegemoet komen:

1e. door die gebeurtenis als limietgeval op te vatten;

2e. door in plaats van BD (resp. BC) een andere lijn door B (voor welke de stelling met behulp van BD eerst bewezen is) als gegeven voorop te stellen."

Tot zoover de heer Crijns. Voor zijn opmerkingen, die de fout in het eerste gedeelte van mijn bewijs geheel opheffen, mijn dank.

BOEKBESPREKING.

Noordhoff's Verzameling van Wiskundige Werken, deel XI.
H. J. van Veen: „Leerboek der Beschrijvende Meetkunde", Deel I. Projectiemethoden. Aanhangsel (Kegelsneden). Groningen, P. Noordhoff, 1925.

Krachtens het voorbericht is dit leerboek bestemd voor die studenten der Technische Hoogeschool te Delft, die de colleges en oefeningen in de Beschrijvende Meetkunde van den schrijver volgen; ten einde het echter ook bruikbaar te maken voor hen die voor de middelbare akte studeeren, zijn de schriftelijke examenopgaven van de laatste jaren opgenomen. Wat de opleiding voor de akte *K I* betreft moge echter opgemerkt worden dat hier het onderwijs in de Beschrijvende Meetkunde heeft te beginnen *ab ovo,* en aangezien de schrijver de elementaire Beschrijvende Meetkunde bekend onderstelt, zou voor déze categorie van studeerenden aan het gebruik van Schrijver's leerboek de studie van een elementair werkje vooraf dienen te gaan.

Schrijver behandelt op beknopte, heldere, ook door den druk overzichtelijke wijze in volgorde de Centrale Projectie, de Gewone Perspectief, de Scheeve Projectie, de Orthogonale Axonometrie, de Scheeve Axonometrie, de methode der Genummerde Projecties, zegt op p. 137 een enkel woord over de Stereographische Projectie en de Photogrammetrie, behandelt op p. 139—154 eenige constructies aangaande cirkels, cylinders, kegels en bollen in de gewone Rechthoekige Projectie, geeft in een Aanhangsel de theorie der kegelsneden (de ellips als parallelprojectie van den cirkel, en de vlakke doorsneden van omwentelingskegels), alsmede een kort hoofdstuk over de Centrale Collineatie, en een laatste over de stellingen van Pascal en Brianchon; het boek sluit met een alphabetisch register. In Hoofdstuk III zijn de fundamenteele begrippen der Projectieve Meetkunde (puntenreeks, waaier, dubbelverhouding, onveranderlijkheid van deze bij snijden en projecteeren, poollijn, pooldriehoek, volledige vierhoek en vierzijde) uiteengezet, van welke in het hoofdstuk over Centrale Collineatie, en ook bij de stellingen van Pascal en Brianchon, gebruik gemaakt wordt. De figuren, fraai en duidelijk en accuraat getee-

kend, zijn vereenigd in een afzonderlijken atlas, wat bij de studie natuurlijk een groot gemak oplevert, en het geheel maakt een indruk, der Firma Noordhoff waardig. De naam van den schrijver is waarborg dat het boek een volkomen betrouwbare gids is, en voor de studenten, voor wie het bestemd is, zal het ongetwijfeld een belangrijke steun zijn, mede door het groote aantal zoo uitgewerkte als niet uitgewerkte vraagstukken dat opgenomen is, en die, methodisch gerangschikt, aan het einde van ieder hoofdstuk te vinden zijn.

Amsterdam, 27 Jan .'26. H. d. V.

Prof. Dr. Hk. de Vries. Historische Studiën I (P. Noordhoff, 1926).

„......al was het alleen maar omdat de jeugd zelve voor de historische ontwikkeling de allergrootste belangstelling heeft. Voor geen wetenschap is het motto, dat boven al onze historische studiën staat[1]), en dat ik zou willen vertalen door „De geschiedenis is de wetenschap zelve", zóó juist als voor de Wiskunde, en in ieder geval krijgt hij, die zich voor de geschiedkundige ontwikkeling wèl interesseert, niet alleen veel levendiger en rijker, maar bovenal ook een veel juister beeld te aanschouwen dan degene wiens belangstelling slechts uitgaat naar de stellingen en de bewijzen zelve. Voor ons staat nog boven de Wiskunde de Mensch, in het bijzonder die wonderbaarlijke werking van zijn denkorgaan; en de weg dien hij heeft moeten bewandelen om zijn weinigje kennis te vergaren, de ontzaglijke inspanning, die hij zich daarbij heeft moeten getroosten, de dwaalwegen waarop zijn kortzichtigheid hem gevoerd heeft, de reuzenstrijd dien hij heeft moeten strijden tegen zijn eigen bekrompenheid en vooroordeelen (men denke aan den 2000 jaar langen strijd tegen het postulaat van Euclides betreffende de evenwijdige lijnen); dan weer, op het alleronverwachtst, de bliksemflitsen van zijn genie, of zijn ongelooflijke volharding en zijn onuitputtelijk geduld (Napier, Briggs, Vlacq bij het samenstellen der oudste logarithmentafels, Kepler bij het afleiden zijner bewegingswetten uit het ontzaglijk waarnemingsmateriaal van Tycho Brahe aangaande de planeet Mars), dat alles is voor ons een eeuwig frissche bron van verheffing en van troost, en een bewijs dat er naast degenen die door alle eeuwen heen uit eerzucht, heerschzucht of hebzucht het menschdom ongelukkig hebben trachten te maken, toch ook altijd anderen geweest zijn die in de reine spheer van volkomen belangeloosheid in alle stilte gearbeid hebben aan het welzijn der menschheid......".

---

[1]) „Historia sapientia ipsa est."

Dit werk bevat de „Historische Studiën", die de schrijver tot nu toe gepubliceerd heeft in het „Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde", en waarmede hij ernaar streefde, onderwerpen uit de geschiedenis der Wiskunde, die hij waardevol acht voor het onderwijs, zoo veel mogelijk toegankelijk te maken voor de docenten. Om duidelijk aan te geven, van welk standpunt uit de schrijver zijn werk beschouwd zal wenschen te zien, meende ik niet beter te kunnen doen dan over te nemen een bladzijde uit No. 5 der Studiën (p. 137).

De docenten zullen den schrijver grooten dank weten. Steeds algemeener wordt het besef, dat bestudeering van de geschiedenis van zijn vak voor den docent een kostelijk middel is om te komen tot die verdieping van zijn weten, die voor vruchtdragend onderwijs een eerste vereischte is. Niet zoo heel gemakkelijk was het echter om tot een eerste kennismaking te komen met deze studie. De schrijver haalt de talrijke onnauwkeurigheden o.a. in Cantor's „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik" aan om te bewijzen, dat het schrijven van een „Geschiedenis der Wiskunde" een werk is, dat de krachten van één man verre te boven gaat. Men zou verder willen gaan en vragen, of niet reeds het bestudeeren van een prachtwerk als dat van Cantor boven die krachten gaat. Al kan men niet beweren, dat de omvang van het werk niet berekend zou zijn naar onzen levensduur, het is toch niet in overeenstemming met den tijd, dien de gelukkigsten onder ons voor studie beschikbaar hebben. Werkjes van veel kleiner omvang geven niet anders dan teleurstelling, omdat zij de onaangename eigenschap bezitten, nimmer het antwoord te bevatten op de vraag, die ons op zeker oogenblik belang inboezemt, en slechts kunnen dienen als middel van verweer tegen lastige knapen, die altijd op het meest ongelegen tijdstip willen weten, in welken tijd de man leefde, wiens lof wij juist gezongen hebben.

De thans aangeboden Studiën komen op zeer gelukkige wijze voorzien in de door vele docenten reeds lang gevoelde behoefte. De schrijver heeft, zooals we reeds deden uitkomen, niet in weinig bladzijden een geschiedenis der wiskunde in vogelvlucht willen geven, maar hij behandelt in dit eerste deel een zevental gewichtige onderwerpen op grondige wijze. De eerste en meest uitvoerige studie heeft betrekking op de geschiedenis van de stellingen van Pascal en Brianchon. Zij begint met de afbeelding van het beroemde blaadje papier, dat Pascal's „Essay pour les coniques" bevat, vervolgt met de geschiedenis, hoe het meetkundige werk van Pascal verloren is gegaan, en hoe de stelling veel later opnieuw ontdekt is. Hierna vernemen we, wat aan de ouden omtrent het onderwerp bekend was, en komen we tot de stelling van Brianchon. Zeer leerzaam is het, hierbij te mogen nagaan, op welke wijze Brianchon de theorie der polariteit behandelt. Verschillende zaken komen nog aan de orde, waarbij de stelling

van Pascal een rol speelt: de volledige figuur van 3 cirkels (Poncelet), de bepaling van het snijpunt eener rechte met een éénbladige hyperboloïde (Servois), Dandelin's onderzoekingen over de omwentelingshyperboloïde, enz. Later geeft nog de involutiestelling van Desargues aanleiding tot de bespreking van een menigte van andere interessante onderzoekingen in hun onderling verband.

Het is niet doenlijk, ook maar in korte trekken een overzicht te geven van den rijken inhoud van het werkje. Het zij mij echter vergund te wijzen op enkele gewichtige opmerkingen, die de schrijver in de volgende Studiën maakt. Zoo vestigt hij in Studie No. 2, die handelt over Jacob Steiner's: „Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und Eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichts-Anstalten und zur practischen Benutzung", de aandacht op de groote waarde, die deze prachtige, en toch inderdaad volkomen elementaire, stof als oefenmateriaal voor onze scholen zou hebben, en spreekt hij niet zonder eenige bitterheid over een zeker conservatisme, dat aan ons wiskunde-onderwijs niet geheel vreemd zou zijn, blijkend uit de angstvalligheid, waarmede wij b.v. de leer der harmonische punten en -stralen vermijden. Tot dezelfde opmerking komt de schrijver bij de bespreking in de 4de Studie van Mascheroni's „Meetkunde van den passer", welk werk tot op zekere hoogte als tegenhanger van het zooeven vermelde van Steiner is te beschouwen.

Nadat de schrijver zich in de 4 eerste Studiën op zuiver meetkundig terrein bewogen heeft, komt hij in No. 5 op ander gebied, waar hij handelt over Archimedes' „Methodenleer der Mechanische Leerstellingen", in welk geschrift ons vergund wordt, een blik te werpen in de wiskundige werkplaats van Archimedes. In de hoogste mate belangwekkend is het, te zien, hoe hij tot meerdere ontdekkingen kwam, die wij thans zoozeer bewonderen, op hoe vernuftige wijze hij wist te integreeren.

In No. 6 wordt gesproken over John Napier en de eerste logarithmentafel, terwijl ten slotte No. 7 geheel is gewijd aan de ontdekking der Analytische Meetkunde; zoodat ter sprake komen de „Geometrie" van Descartes en de „Isagoge" van Fermat. De schrijver zet op duidelijke wijze deze beide geschriften tegenover elkaar.

Bijna onnoodig is het, te wijzen op de even boeiende als klare wijze van uiteenzetting, waar de schrijver aan het wiskunde beoefenend publiek reeds voldoende bekend is.

Wij meenen dan ook dit werk met warmte te mogen aanbevelen; ongetwijfeld zal de lezing aan ieder, die het ter hand neemt, niet alleen groot nut, doch ook een voornaam genoegen verschaffen.

H. J. E. Beth.

Dr. M. van Haaften. Nicolaas Struyck met bibliografie zijner actuarieele, geografische, statistische, astronomische, wiskundige en boekhoudkundige geschriften. (Martinus Nijhoff, 's-Gravenhage, 1925). Prijs *f* 2.—.

Dr. van Haaften heeft zijn verhandelingen over de geschiedenis van de wiskundige, in het bijzonder van de actuarieele wetenschap, wederom met eene verhandeling vermeerderd. Na „Johann de Witt en de Levensverzekering", opgenomen in „de Levensverzekering", jaargang 1925 en „Kersseboom en zijn geschriften", verschenen in „de Economist", jaargang 1925, heeft hij thans tot onderwerp van zijn studie genomen den wiskundige en actuaris Nicolaas Struyck (1687—1769). In het eerste deel van zijn verhandeling over Struyck behandelt hij de sterftetafels, die door dezen actuaris zijn samengesteld en wijst hij er op, dat aan het werk van Struyck menigmaal niet de eer is toegekend, waarop deze recht heeft. Het tweede deel bevat een bibliografie van de werken van Struyck.

Het boekje legt opnieuw de getuigenis af van de rijke kennis, die de schrijver zich heeft weten te verwerven op het gebied der historie onzer actuarieele wetenschappen. Voor belangstellenden in de ontwikkeling van de verzekeringwetenschap in Nederland zal deze bijdrage een welkome gids zijn. Daarbij zullen de uitvoerige noten aan den voet van elke bladzijde en de menigvuldige verwijzingen naar andere publicaties den lezer tot verder onderzoek aansporen.

Een verdere mededeeling van den inhoud meenen wij achterwege te moeten laten, den lezer verwijzen wij hiervoor naar de verhandeling zelve. Wij willen er nog op wijzen, dat de schrijver de goede gewoonte, die hij in zijn publicaties pleegt te volgen, ook in deze verhandeling heeft gehandhaafd; het boekje is van een voortreffelijk register voorzien. Dr. J. de Hullu.

P. Wijdenes, Theorie der Rekenkunde. (Groningen, P. Noordhoff, 1926).

Uit het Voorbericht maak ik op, dat het boek hoofdzakelijk bedoeld is voor het gebruik op Kweek- en Normaalscholen. Als de heer W. nu tot den leeraar zegt: „U kunt en moet uwe leerlingen leeren, dat de Theorie der Rekenkunde, waarop de geheele Wiskunde steunt, een schoon geheel is zonder barsten, zonder vooze plekken, zonder hiaten, zoodat men er, om zoo te zeggen, geen speld tusschen kan krijgen", dan ben ik 't met zijn bedoeling volkomen eens. In zijn vuur heeft de heer W. zich natuurlijk even voorbijgepraat, want het woord „geheele" vóór Wiskunde zal hij wel niet zóó gemeend hebben.

Inderdaad is het wenschelijk, dat zij, die onze leerlingen in hun prilste jeugd te onderwijzen hebben, de Theorie der Rekenkunde deugdelijk hebben geleerd. Hoe dikwijls is mij gebleken, dat hier het tegendeel heeft plaats gehad; hoe dikwijls o.a. heb ik van mijn leerlingen moeten vernemen, dat ze in de hoogste klasse van de lagere school leerden, dat de Rekenkunde tot grondeigenschap (als axioma bedoeld) heeft: „Een hoeveelheid (verzameling van eenheden) verandert niet, wanneer de eenheden, waaruit zij is samengesteld, in een andere volgorde worden genomen, of wanneer deze in willekeurige groepen worden verdeeld, mits er geen enkele eenheid worde bijgevoegd of weggelaten" (b.v. D. B. Wisselink, Theorie der Rekenkunde I)! Hebben de verschillende schrijvers van leerboeken, die dezen zin maar klakkeloos van elkaar overschreven, nu nooit eens bedacht, wat voor niets-zeggende [1]) heelemaal-geen-rekenkundig-grond-leggende zin daar uitgesproken wordt? En wat ik hier zeg, heb ik ook vaak voorgehouden aan onderwijzers (meest met hoofdacte), die wel eens mijn hulp inriepen voor een opleiding voor de lagere acte Wiskunde. En steeds bleek mij, dat men wel *in 't algemeen* (misschien zijn er uitzonderingen?) van een ontbreken van een fundamenteel rekenkundig begrip bij de onderwijzers van 't L. O. kan spreken.

Een poging van den heer W. om hierin verbetering te brengen, moet dus alleen al om de poging zelf, geprezen worden.

Toch vind ik 't jammer, dat de heer W. niet — zoo komt het mij ten minste voor — in alle opzichten geslaagd is. Nadat ik zijn boek aandachtig had doorgezien, bleek 't mij, dat men het werk kan verdeelen in twee deelen, die een geheel verschillende beoordeeling verdienen: 1e. § 1 tot en met § 9 (blz. 1—13) vormende de Inleiding en de Optelling en 2e. § 10 tot en met § 56 (blz. 14 tot het einde van het boek) bevattende verder alle overige door den heer W. behandelde hoofdstukken van de Theorie der Rekenkunde. Met de behandeling van het eerste (verreweg het kleinste) deel kan ik mij zeer weinig, met 't overige deel kan ik mij vrij goed vereenigen.

Laat ik beginnen met eenige beschouwingen te houden over het eerste (kleinste) deel.

De Inleiding begint aldus: „§ 1. Onder *tellen* verstaat men het opzeggen van de aan ieder wel bekende geordende rij van klanken één, twee, drie, vier, enz. De teekens 1, 2, 3, 4, ..., waardoor wij deze klanken aanduiden, heeten *de natuurlijke getallen*". ...

Inderdaad, zoo kàn men beginnen. Wanneer dan b.v. 3 voorgesteld wordt door a, kan men bij definitie 4 voorstellen door $a+1$ enz. Daarom komt het mij voor, dat de noot, die de Schr. al bij den aan-

---

[1]) of foutief-zeggende!

vang toevoegt, misplaatst is. Hij zegt n.l. in die noot, dat hij zich niet in staat acht de philosophische grondslagen der rekenkunde te leggen; dat 't eigenlijk niemand tot nu toe gelukt is en dat hij daarom den leeraren den raad geeft maar over de eerste begrippen heen te glijden. Verder verwijst hij nog naar een daarmee eenigszins overeenkomende uitspraak van Klein, maar zegt dan — wat er toch weer niet mee klopt — Ik leg in dit boekje *een stevigen vloer op een iets hooger plan en daarop ga ik voortbouwen.*

Nu ligt in dit alles, wat de heer W. hier zegt, iets verwarrends. Natuurlijk kan hij zich op het standpunt plaatsen, waarop men de grondbeginselen der Rekenkunde als „intuitief" vooropstelt, allerlei waarheden noemt of uitspraken geeft, maar zich er verder — tot een bepaald punt — niet over uitlaat, of men nu met een definitie, of een axioma of een afgeleide eigenschap te doen heeft. [In geringe mate (ik ben van die methode geen groot bewonderaar,) doet zooiets Molenbroek in zijn Leerboek der Vlakke Meetkunde.] Bij de lezing van het begin van de Inleiding meende ik, dat dit het standpunt van den heer W. *niet* was, verder lezende — er worden twee eigenschappen voor gelijkheden en drie voor ongelijkheden genoemd — moest ik — vooral ook in verband met het begin van de boven aangehaalde noot — tot de conclusie komen, dat dit het standpunt van den heer W. *wel* was, maar het slot van de noot bracht mij toch weer aan het twijfelen en dat twijfelen werd nog sterker, toen ik op blz. 3 met kleine letters een langdurige beschouwing las over de eischen, waaraan de behandeling van een wiskundige wetenschap moet voldoen. Nu brachten mij, wel is waar, de bladzijden 7 en 8 de oplossing van de puzzle, maar ik geloof niet, dat veel mathematici deze oplossing zullen toejuichen: *De heer W. verklaart alle vijf reeds genoemde eigenschappen benevens de associatieve en de commutatieve eigenschap der optelling voor axioma's.*

Dit is een „schijnfundeering". Want wanneer men zich werkelijk met een systeem axioma's op een wat hooger plan wil stellen, dan moet zoo'n systeem o. a. aan twee eischen voldoen: de axioma's moeten *onafhankelijk van elkaar* zijn en ze moeten ook stuk voor stuk *verworpen kunnen worden* en telkens door een ander gelijksoortig fundament vervangen kunnen worden. De heer W. zegt toch op blz. 7 ook zelf, dat een axioma of postulaat een grondstelling is, die „op grond van de bereidwilligheid van den hoorder" aan de redeneering ten grondslag wordt gelegd. Welnu, den heer W., die van de meer wetenschappelijke theoretische rekenkunde toch beslist méér weet, is 't natuurlijk bekend, dat zeer zeker de zeven uitspraken aan de twee genoemde eischen niet voldoen.

Ik heb bovendien nog een niet minder gewichtig bezwaar: De wijze,

waarop de heer W. de natuurlijke getallen invoert, wordt door hem niet volgehouden. Inderdaad kan men de natuurlijke getallen als louter symbolen opvatten, maar ik vind deze wijze van doen voor een leerboek, dat niet voor hoogwetenschappelijke beoefening der rekenkunde bestemd is, beslist niet aan te bevelen. Immers deze wijze van doen vereischt bij het denken een mate van abstractie, waarvan de wenschelijkheid hier volstrekt nog niet vaststaat[1]), in de eerste plaats al bij de juiste definitie der optelling en ik geloof niet, dat de heer W. geslaagd is in een behoorlijke aansluitende bepaling voor deze bewerking. Hij zegt: „Onder optellen verstaat men een herhaald toepassen van de elementaire bewerking (den overgang van a op $a+1$). Een getal b wordt bij een getal a opgeteld, doordat men, uitgaande van *a, b-maal achtereen* de elementaire bewerking toepast". Wat is dat: *b-maal achtereen*? Komt hier niet voor den dag die andere grondslag van de getallenleer, waarvan Schubert in de groote Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften zegt: „In dieser Definition der Zahl stimmen wohl alle Philosophen und Mathematiker im Wensentlichen überein" en dat wel: „Dinge *zählen* heisst, sie als gleichartig ansehen, zusammen auffassen, und ihnen einzeln andere Dinge zuordnen, die man auch als gleichartig ansieht............ Das Ergebnis des Zählens heisst *Zahl*". Nu kan men dezen grondslag, die volmaakt natuurlijk is, in populairen vorm ook aan jeugdige leerlingen meedeelen (zie mijn artikel in 't Bijvoegsel, jg. II, no. 1) en hoewel ik thans niet wensch in te gaan op de verdere consequenties van dezen grondslag[2]), wil ik wel nog even vertellen, hoe men dan de optelling moet definieeren. Ik kan daartoe gerust overschrijven, hetgeen Schubert zoo voortreffelijk zegt: „Wenn man zwei Gruppen von Einheiten hat, und zwar so, dass nicht allein Einheiten jeder Gruppe gleichartig sind, sondern dass auch jede Einheit der einen Gruppe jeder Einheit der anderen Gruppe gleichartig ist, so kann man zweierlei thun: entweder man kann jede Gruppe einzeln Zählen und jedes der beiden Zähl-Ergebnisse als Zahl auffassen oder man kann die Zählung über beide Gruppen erstrecken und das Zähl-Ergebnis als Zahl auffasen. Im ersteren Falle erhält man zwei Zahlen, im letzteren Falle nur eine Zahl. Man sagt dann von dieser im letzteren Falle erhaltenen Zahl, dass sie die Summe der beiden im ersteren

---

[1]) De methode is bovendien in zoover aanvechtbaar, dat — ook volgens eenige vooraanstaande mathematici — een absolute symboliek zonder eenige „toeordening" niet mogelijk lijkt.

[2]) Ik volg het artikel van Schubert bij mijn onderwijs zeker niet *geheel*. Dit blijkt toch uit de aanwijzing, die ik geef in het door mij aangehaalde artikel in 't Bijvoegsel.

Falle erhalten Zahlen sei...... Der soeben geschilderte Uebergang von zwei Zahlen zu einer einzigen heisst *Addition.*

En nu vraag ik den heer W.: Zit in dit *b-maal achtereen* nu niet in den grond de zooeven genoemde definitie der optelling? Want het optellen van de getallen 6 en 4 moet men zich toch volgens zijn bedoeling wel zóó voorstelen, dat de symbolen 7 tot en met 10 „toegeordend" [1]) worden aan de symbolen 1 tot en met 4, wat dan toch op 't zelfde neerkomt, als dat 7 tot en met 10 toegeordend worden aan dingen, waaraan eerst de symbolen 1 tot en met 4 zijn toegeordend.

Het komt mij voor, dat de heer W. zich tot het schrijven van de Inleiding en de Optelling weinig aangetrokken gevoeld heeft en dan doet zich de vraag voor, of hij niet beter gedaan had met die enkele bladzijden door een ander te hebben laten schrijven, die daartoe meer lust had. Want zooals ik in 't begin van deze beoordeeling al meedeelde: Te beginnen met de Aftrekking verdient het boek een geheel andere beoordeeling. Al dadelijk komt de eenig juiste definitie der Aftrekking (uit de optelling afgeleid), die men nog maar al te veel in leerboeken mist. Verderop worden de breuken ook ingevoerd op de wijze, zooals dat eigenlijk behoort (def.: $b \times \frac{a}{b} = a$, conform de definitie voor deeling). Toch mis ik op blz. 52, waar de Schr. de „gangbare opvatting van een breuk" noemt, het betoog — dat toch in een dergelijk leerboek beslist noodzakelijk is —, dat de „theoretische" opvatting en de „gangbare" convergeeren. Ik merk ook op de beschrijving van het eenvoudiger kenmerk van deelbaarheid door 11 dan het gebruikelijke. Op blz. 132 en 133 had ik de invoering van het irrationaal getal iets correcter gewenscht. Verkeerd is b.v. te *beginnen* met $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$ enz., want dan is $\sqrt{3}$ nog geen getal en kan dan zeker niet vergeleken worden met de meetbare getallen 1,7 en 1,8. Verder merk ik hier de fout op, die door menig leerboekschrijver gemaakt wordt, n.l. het gebruik van uitdrukkingen als „zoo klein gemaakt kan worden, als men wil", of „willekeurig klein gemaakt kan worden", waar moest staan: „kleiner gemaakt kan worden dan welk positief getal ook". Op blz. 141 zie ik ook dezelfde verkeerde uitdrukking omtrent r^n. Het bewijs, dat lim $r^n = 0$, had er ook wel mogen staan en als de Schr. er bezwaar tegen had 't daar te vermelden, dan had hij in een noot er iets over kunnen zeggen.

Gaarne had ik in het boek ook een behandeling der overige getalvormen aangetroffen. (negatieve, onmeetbare, imaginaire, complexe).

---

[1]) Beter dit germanisme dan het hollandsche niet-geheel-dekkende „toegekend".

Wel is waar zou dan de omvang belangrijk grooter zijn geweest, maar men had dan toch een fraai geheel van de getallenleer kunnen krijgen. De opvatting, dat al dat andere in de algebra thuis behoort, komt mij toch, van een eenigszins ruim standpunt bezien, niet juist voor.

Het boek bevat een groote collectie goede vraagstukken.

Als ik nu de balans van het geheel opmaak, moet ik zeggen, dat het boek wel onder de goede kan gerekend worden en ik vertrouw, dat de heer W. zeker bij een volgenden druk de onvolkomenheden, die gelukkig slechts enkele bladzijden betreffen en die, als zoodanig gesignaleerd, misschien ook wel eenigszins van mijn persoonlijk inzicht in deze materie afhangen, zal trachten te verbeteren. Een troost ook kan hij thans putten uit de wetenschap, dat er tal van boeken op het gebied van de theorie der rekenkunde zijn, die zeker van minder kwaliteit zijn dan dit boek: ik vermoed wel de meeste!

D. P. A. V.

J. W. N. le Heux, Beginselen der Nomographie, Deventer, Æ. E. Kluwer, 1926; Prijs *f* 1,20.

De schrijver, leeraar aan de Koninklijke Militaire Academie te Breda, heeft blijkens het voorbericht het werkje oorspronkelijk samengesteld om artillerie-officieren met de beginselen der nomographie bekend te maken. Het lijkt mij zeer geschikt, om ieder, die iets van deze rekenwijze wenscht te weten, met de beginselen ervan op de hoogte te stellen. Op eenvoudige en heldere wijze, zijne redeneeringen met vele eenvoudige voorbeelden toelichtend, behandelt de schrijver de diensten, die graphische voorstellingen bij benaderende berekeningen kunnen bewijzen. In een eerste hoofdstuk, getiteld Graphieken, behandelt de schrijver de graphische voorstellingen, zooals wij allen die uit de practijk des dagelijkschen levens en uit de onderwijspractijk kennen. Het tweede hoofdstuk behandelt de coördinaatpapieren, die het mogelijk maken, een niet-lineaire functie door eene rechte lijn voor te stellen. Bij de exponentieele functie bereikt men dit door het gebruik van een papier, dat langs de eene as de gewone verdeeling en langs de andere eene logarithmische verdeeling heeft. Het gebruik van de verschillende in den handel verkrijgbare papiersoorten wordt met voorbeelden verduidelijkt. Het derde hoofdstuk behandelt de nomogrammen, dat zijn graphische voorstellingen, die het mogelijk maken, de waarde eener functie van eenige onafhankelijk veranderlijken bij gegeven waarden van die veranderlijken direct af te lezen.

Het vierde hoofdstuk bevat eene korte herhaling van het behandelde en 77 vraagstukken ter oefening.

Het zou mij niet verwonderen, als dit aardige werkje dankbare lezers vond buiten den kring dergenen, voor wie het bestemd is, namelijk onder hen, die, hoewel door werkkring en aanleg meer theoretisch georienteerd, belang stellen in de toepassingen, die de techniek van de wiskunde maakt. J. H. S.

Dr. *J. G. Rutgers,* Beknopte Analytische Meetkunde. Groningen, P. Noordhoff, 1925. Prijs *f* 10.— (geb.).

Dit boek is eene beknopte uitgave van een vroeger verschenen werk van denzelfden schrijver: Inleiding tot de Analytische Meetkunde. In tegenstelling daarmede bevat het niet meer, dan wat aan de Technische Hoogeschool te Delft over analytische meetkunde gedoceerd wordt, zoodat het boek zeer geschikt is voor studenten aan die inrichting.

Het 470 bladzijden groote werk bevat 225 vraagstukken over de meetkunde van het platte vlak en 130 over die der ruimte; het is keurig uitgevoerd, en tot groot gerief van de gebruikers, voorzien van een register. J. H. S.

Dr. *Fred. Schuh,* Vraagstukken over differentiaal- en integraalrekening, en over analytische en beschrijvende meetkunde. Groningen, P. Noordhoff, 1923—1926.

Eene groote verzameling vraagstukken, door Prof. Schuh op zijne bekende nauwkeurige wijze van volledige aanwijzingen ter oplossing voorzien, een werk van onschatbare waarde voor hen, die zich voor het examen K 5 voorbereiden en daarbij op zelfstudie zijn aangewezen. Elk vraagstuk wordt onmiddellijk door de oplossing gevolgd, zoodat de gebruiker van het boek telkens de verleiding weerstand moet bieden, om te gauw een blik in de oplossing te werpen.

Het plan, volgens hetwelk het werk is opgezet, schijnt ongeveer als volgt te zijn: drie series vraagstukken worden behandeld: de eerste bestaat uit gemakkelijke vraagstukken, die als inleiding tot de studie kunnen dienen, de tweede bevat de op het examen K 5 opgegeven vraagstukken, de derde bevat vraagstukken van dezelfde of grootere moeilijkheid als (dan) de tweede, in aansluiting aan die der tweede gekozen.

Hiervan is nu het volgende verwezenlijkt. Verschenen is:

Deel Ia, Vraagstukken over differentiaalrekening (1925, prijs *f* 8.—). Hierin komen vraagstukken voor over de techniek van het

differentieeren, reeksenontwikkeling, extremen en meetkundige toepassingen.

Deel II, Schriftelijke vraagstukken van het examen wiskunde K 5, 1900—1922 (1923, prijs *f* 7,50). Hierin vindt men de examen-vraagstukken van alle in den titel van het werk genoemde vakken. Er zijn drie supplementen verschenen, (prijs van elk *f* 0,75) bevattende de examenopgaven der jaren 1923, 1924 en 1925.

Deel III, Vraagstukken over differentiaal- en integraalrekening (1924, *f* 14,50). Dit deel bevat vraagstukken over differentiaalrekening, en over integraalrekening (berekening van bepaalde integralen volgens verschillende methoden, berekening van lengten, oppervlakken en inhouden). J. H. S.

J. H. Schogt, Beginselen der Theoretische Mechanica, I. Groningen, P. Noordhoff, 1926; Prijs *f* 3,—.

Dit werk is het resultaat van eene poging om eenige fouten, die naar mijne meening de gebruikelijke leerwijze der mechanica aankleven, te vermijden. J. H. S.

Herdrukken van Schoolboeken. (Uitgave P. Noordhoff).

P. Wijdenes, Algebraïsche vraagstukken II, 5e druk. *f* 2,40.

„ , Nieuwe school-algebra I, 2e druk. *f* 2,—.